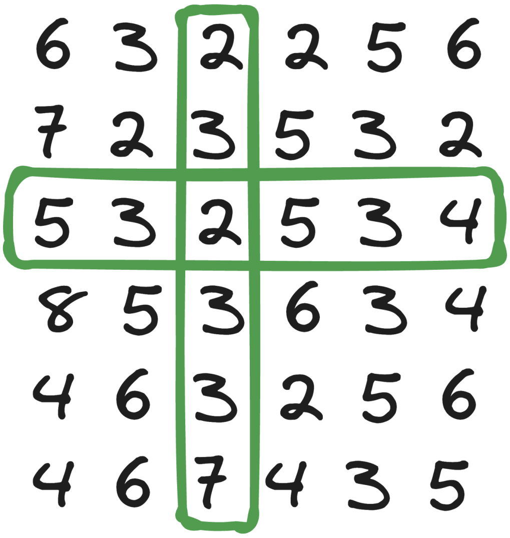
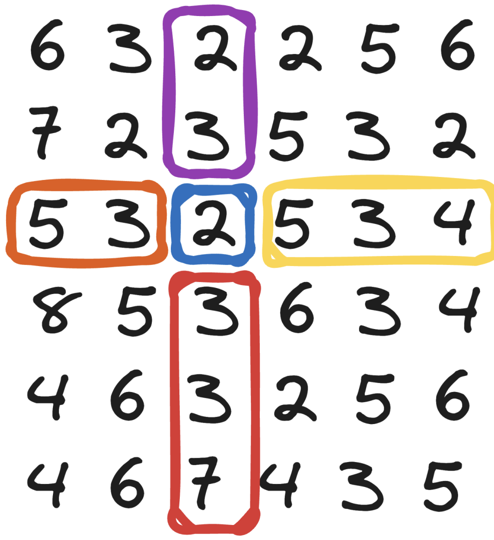
Formație

Autor: stud. Măierean Mircea, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca

Cel mai important aspect al unei formații este reprezentat de către limitele pe care aceasta le are. Buna delimitare a limitelor fiecărei formații este esențială pentru rezolvarea problemei. Având în vedere că pot exista formații cu un singur element, fiecare element al matricei va fi, pentru cel puțin o formație, nucleu. Așadar, vom determina, pentru fiecare element, i_1, i_2, j_1, j_2. O formație poate fi decompusă într-un nucleu, si 4 ramuri, una în sus, una în jos, una în dreapta și una în stânga. Numărul de elemente pe o ramură poate să fie și egal cu 0.





În desenul de mai sus, formația este încadrată în chenarul verde, *nucleul* este delimitat de chenarul albastru, ramura de *sus* este delimitată de chenarul mov, ramura de *jos* este delimitată de chenarul roșu, ramura din *stânga* este delimitată de chenarul portocaliu, iar ramura din *dreapta* este delimitată de chenarul galben.

Subtask 1. $C = 1$ și $N \leq 8$.

Vom defini 4 variabile:

- sus: numărul de elemente aflate pe ramura de sus, între i_1 și $i-1$: $sus = i - i_1$
- jos: numărul de elemente aflate pe ramura de jos, între $i+1$ și i_2: $jos = i_2 - i$
- $stânga$: numărul de elemente aflate pe ramura din $stânga$, între j_1 și $j-1$: $stânga = j - j_1$
- $dreapta$: numărul de elemente aflate pe ramura din $dreapta$, între $j+1$ și j_2; $dreapta = j_2 - j$

Pentru a determina valorile maxime ale i_1, i_2, j_1, j_2, vom itera în sus, jos, stânga și dreapta, pornind de la $i = l$, $j = c$, până când, pe fiecare direcție, vom ajunge la un element care este mai mic decât nucleul nostru.

Cunoscând lungimile pe fiecare direcție, putem genera toate formațiile. Avem o construcție din 4 numere. Vom considera:

- $\{0, 0, 0, 0\}$: formație având lungimea ramurii de $sus = 0$, $jos = 0$, $stânga = 0$, $dreapta = 0$;
- $\{0, 0, 0, 1\}$: formație având lungimea ramurii de $sus = 0$, $jos = 0$, $stânga = 0$, $dreapta = 1$;

- $\{0, 0, 1, 0\}$: formație având lungimea ramurii de *sus* $= 0$, *jos* $= 0$, *stânga* $= 1$, *dreapta* $= 0$;
- $\{0, 0, 1, 1\}$: formație având lungimea ramurii de *sus* $= 0$, *jos* $= 0$, *stânga* $= 1$, *dreapta* $= 1$;

  .

  .

  .
- $\{i - i_1, i_2 - i, j - j_1, j_2 - j\}$: formație având lungimea ramurii de *sus* $= i - i_1$, *jos* $= i_2 - i$, *stânga* $= j - j_1$, *dreapta* $= j_2 - j$;

Ținem o variabilă pentru contor. Vom itera prin fiecare variantă posibilă, și vom incrementa contorul pentru fiecare configurație existentă.

Complexitate: $O(N^6)$

Subtask 2. $C = 2$ și $N \leq 8$.

Se aplică exact același raționament ca la *Subtask 1*, doar că, numărul total de formații care au nucleul în $A[i][j]$ va fi egal cu $(i - i_1 + 1) * (i_2 - i + 1) * (j - j_1 + 1) * (j_2 - j + 1)$. Numărul total de formații existente în matrice va fi suma acestor sume, pentru fiecare nucleu.

Complexitate: $O(N^3)$

Subtask 3. $C = 1$.

Folosind o stivă, vom determina cei 4 indici care delimitează fiecare formație cu nucleul în $A[i][j]$. Reținem pentru fiecare pereche $\{i, j\}$, valorile maxime pe care le pot avea i_1, i_2, j_1, j_2. În stivă, introducem perechi de numere, reprezentând indicii elementelor matricei. Stiva se construiește pentru fiecare linie, și coloană. Determinăm limitele pentru linii. Inițial, pentru stânga și dreapta, limitele vor fi capetele liniei, 1 și n. Cât timp stiva noastră conține elemente, și $A[i][j]$ este mai mic decât elementul corespunzător perechii de indici aflate pe vârful stivei, vom:

- Actualiza limita din stânga pentru elementul din vârf cu $j - 1$
- Scoate elementul din vârful stivei

După aceea, dacă stiva noastră conține elemente, vom marca limita din stânga pentru $\{i, j\}$ cu:

- limita din stânga a elementului aflat în vârful stivei, dacă $A[i][j]$ este egal cu elementul cu coordonatele egale cu cele din vârf
- al doilea element al perechii de numere aflată pe vârful stivei, altfel

La final, adăugăm elementul în stivă. Procedeul se repetă la fel pentru coloane, pentru a delimita limitele de sus și de jos.

Cunoscând limitele, putem aplica formula de la *Subtask 2*.

Complexitate: $O(N^2)$

Subtask 4. $C = 2$ și $N \leq 8$.

Aplicăm raționametul de la *Subtask 1*. Pe măsură ce generăm fiecare formație posibilă, calculăm suma elementelor aflate în aceasta. La fiecare incrementare, adăugăm la suma valoarea noului element. La final, înmulțim rezultatul cu $A[i][j]$, și îl vom adăuga la suma tuturor puterilor.

Complexitate: $O(N^6)$

Subtask 5. $C = 2$ și $N \leq 80$.

Pentru a determina suma puterilor, vom calcula suma puterilor tuturor formațiilor având nucleul în $A[i][j]$. Fiind vorba de sume de produse, vom da factor comun pe $A[i][j]$.

Ne vom folosi de descompunerea formației în cele 5 componente. Definim următorii termeni:

- $sumaSus$, fiind suma elementelor aflate pe ramura de sus a formației;
- $sumaJos$, fiind suma elementelor aflate pe ramura de jos a formației;
- $sumaStanga$, fiind suma elementelor aflate pe ramura din stânga a formației;
- $sumaDreapta$, fiind suma elementelor aflate pe ramura din dreapta a formației;

Indiferent de limitele selectate pentru o anumită formație, la calcularea sumei puterilor există:

- $(i_2 - i + 1) * (j - j_1 + 1) * (j_2 - j + 1)$ apariții ale ramurii de sus;
- $(i - i_1 + 1) * (j - j_1 + 1) * (j_2 - j + 1)$ apariții ale ramurii de jos;
- $(i - i_1 + 1) * (i_2 - i + 1) * (j_2 - j + 1)$ apariții ale ramurii din stânga;
- $(i - i_1 + 1) * (i_2 - i + 1) * (j - j_1 + 1)$ apariții ale ramurii din dreapta;
- $(i - i_1 + 1) * (i_2 - i + 1) * (j - j_1 + 1) * (j_2 - j + 1)$ apariții ale nucleului;

Scopul nostru rămâne să determinăm, pentru toate formațiile cu nucleul în $A[i][j]$, suma tuturor ramurilor, pentru fiecare direcție posibilă.

Vom trata cazul pe coloană. Ramura de sus se va afla între i_1 și $i - 1$, iar cea de jos se va afla între $i + 1$ și i_2. Vom avea:

- $sumaSus = A[i_1][c] + A[i_1 + 1][c] + A[i_1 + 2][c] + ... + A[i - 1][c]$
- $sumaJos = A[i + 1][c] + A[i + 2][c] + A[i + 3][c] + ... + A[i_2][c]$

Similar, se procedează și pentru linii. Pentru calcularea rapidă a acestor sume, vom precalcula sume parțiale pentru linii și coloane:

$Sl[i][j]$: suma elementelor de pe linia i, începând de la coloana 1, până la coloana j.

$$Sl[i][j] = A[i][1] + A[i][2] + A[i][3] + ...A[i][j].$$

$Sc[i][j]$: suma elementelor de pe coloana j, începând de la linia 1, până la linia i.

$$Sc[i][j] = A[1][j] + A[2][j] + A[3][j] + ...A[i][j].$$

Sumele devin:

- $sumaSus = S[i - 1][c] - S[i_1 - 1][c]$
- $sumaJos = S[i_2][c] - S[i][c]$
- $sumaStanga = S[l][j - 1] - S[l][j_1 - 1]$
- $sumaStanga = S[l][j_2] - S[l][j]$

Folosind aceste formule, calculăm suma tuturor sumelor parțiale, corespunzătoare ramurii respective. Pentru suma de sus, iterăm de la $i-1$ către i_1, și calculăm suma sumelor parțiale. La puterea totală, adăugăm produsul dintre numărul de apariții pentru ramura de sus, și suma de sume parțiale. Procedăm similar pentru toate celelalte direcții rămase. La final, adăugam produsul dintre numărul de apariții al nucleului, și valoarea acestuia. După ce am calculat această sumă, vom înmulți totul cu valoarea nucleului, pentru a afla suma tuturor puterilor formațiilor cu nucleul în $A[i][j]$.

Complexitate: $O(N^3)$

Subtask 6. $C = 2$

Construim pe ideea de la *Subtask 5*. Analizăm cazul pentru ramura din dreapta. Limita este j_2. Așadar, putem avea următoarele ramuri în dreapta:

- Început: $j+1$; Final: $j+1$; $sumaDreapta = A[i][j+1]$
- Început: $j+1$; Final: $j+2$; $sumaDreapta = A[i][j+1] + A[i][j+2]$
- Început: $j+1$; Final: $j+3$; $sumaDreapta = A[i][j+1] + A[i][j+2] + A[i][j+3]$

  .

  .

  .
- Început: $j+1$; Final: j_2-1; $sumaDreapta = A[i][j+1] + A[i][j+2] + A[i][j+3] + ... + A[i][j_2-1]$
- Început: $j+1$; Final: j_2; $sumaDreapta = A[i][j+1]+A[i][j+2]+A[i][j+3]+...+A[i][j_2-1]+A[i][j_2]$

Făcând suma tuturor ramurilor, obținem:

$$sSumRamuriDreapta = (j_2-j)*A[i][j+1] + (j_2-j-1)*A[i][j+2] + (j_2-j-2)*A[i][j+3] + ... + \\ +2*A[i][j_2-1] + A[i][j_2].$$

Pentru determinarea acestei sume în timp constant, vom precalcula, pe lângă sumele parțiale pe fiecare linie și coloană, sume parțiale pentru sume parțiale:

$Ssl[i][j]$: suma sumelor parțiale pentru linia i, începând de la coloana 1, până la coloana j.

$$Ssl[i][j] = Sl[i][1] + Sl[i][2] + Sl[i][3] + ... + Sl[i][j].$$

$Ssc[i][j]$: suma sumelor parțiale pentru coloana j, începând de la linia 1, până la linia i.

$$Ssc[i][j] = Sc[1][j] + Sc[2][j] + Sc[3][j] + ... + Sc[i][j].$$

Totodată, aceste sume pot fi scrise în funcție de elementele matricei A

$$Ssl[i][j] = j*A[i][1] + (j-1)*A[i][2] + (j-2)*A[i][3] + ... + 2*A[i][j-1] + A[i][j].$$
$$Ssc[i][j] = i*A[1][j] + (i-1)*A[2][j] + (i-2)*A[3][j] + ... + 2*A[i-1][j] + A[i][j].$$

Pentru j_2:

$$Ssl[i][j_2] = j_2*A[i][1] + (j_2-1)*A[i][2] + (j_2-2)*A[i][3] + ... + (j_2-j+1)*A[i][j] + \\ +(j_2-j)*A[i][j+1] + ... + 2*A[i][j_2-1] + A[i][j_2].$$

$$Ssl[i][j_2] = j_2*A[i][1] + (j_2-1)*A[i][2] + (j_2-2)*A[i][3] + ... + sSumRamuriDreapta.$$

$$Ssl[i][j_2] = j * A[i][1] + (j-1) * A[i][2] + (j-2) * A[i][3] + ... + A[i][j] +$$
$$+ (j_2 - j) * (A[i][1] + A[i][2] + A[i][3] + ... + A[i][j]) +$$
$$+ sSumRamuriDreapta.$$

$$Ssl[i][j_2] = Ssl[i][j] + (j_2 - j) * sl[i][j] + sSumRamuriDreapta =>$$
$$=> SumRamuriDreapta = Ssl[i][j_2] - Ssl[i][j] - (j_2 - j) * sl[i][j].$$

Analog, se calculează și pentru $sSumRamuriJos$.

Pentru $sSumRamuriStanga$, lucrurile diferă puțin. Trebuie să facem niște artificii de calcul, deoarece nu putem afla rezultatul direct din scăderi ale unor valori.

Făcând suma tuturor ramurilor, obținem:

$$sSumRamuriStanga = A[i][j_1] + 2 * A[i][j_1 + 1] + 3 * A[i][j_1 + 2] + ... + (j - j_1) * A[i][j - 1]$$

Limita din dreapta a ramurii din stânga este $j - 1$. Analizăm suma de sume parțiale pe linii până la coloana $j - 1$:

$$Ssl[i][j-1] = (j-1) * A[i][1] + (j-2) * A[i][2] + ... + (j - j1) * A[i][j1] + ... + A[i][j-1]$$

$$Ssl[i][j-1] = (j - j_1 + 1) * (A[i][j_1] + A[i][j_1 + 1] + ... + A[i][j-1]) +$$
$$+ (j_1 - 1) * A[i][1] + (j_1 - 2) * A[i][2] + ... + A[i][j_1 - 1] +$$
$$+ (j - j1) * (A[i][1] + A[i][2] + ... + A[j_1 - 1]) -$$
$$- (A[i][j_1] + 2 * A[i][j_1 + 1] + 3 * A[i][j_1 + 2] + ... + (j - j_1) * A[i][j-1])$$

$$Ssl[i][j-1] = (j - j_1 + 1) * (S[j-1] - S[j_1 - 1]) + Ssl[i][j_1 - 1] + (j - j1) * (S[i][j_1 - 1]) - sSumRamuriStanga$$

Din această ecuație, rezultă că:

$$sSumRamuriStanga = (j - j_1 + 1) * (S[j-1] - S[j_1 - 1]) + Ssl[i][j_1 - 1] + (j - j1) * (S[i][j_1 - 1])) - Ssl[i][j-1]$$

Analog, se calculează și pentru $sSumRamuriSus$.

Astfel, putem determina, în $O(1)$, suma tuturor ramurilor care se pot obține pentru o formație cu nucleul în $A[i][j]$. Aplicăm formulele descrise la *Subtask 5*.

Complexitate: $O(N^2)$

Notă.

Toate operațiile se calculează MOD $10^9 + 7$.

Formulele pentru a calcula $sSumRamuriStanga$ pot fi simplificate, calculându-se sumele parțiale și sumele de sume parțiale, începând de la n către 1.