## CLASA a V-a

**Problema 1.** Spunem că un număr natural $n$ este "monoton" dacă are cel puţin un multiplu nenul cu toate cifrele egale. De exemplu numărul 37 este monoton, pentru că $3 \cdot 37 = 111$.

a) Arătaţi că numărul 12 este monoton.

b) Care este cel mai mic număr monoton de 4 cifre?

c) Baronul Münchhausen susţine că toate numerele naturale de 4 cifre care nu se divid cu 10 sunt monotone. Arătaţi-i că nu are dreptate!

*Folclor*

Soluţie

a) Numărul 444 se divide şi cu 3 şi cu 4, deci este multiplu de 12, sau observăm că $12 \cdot 37 = 4 \cdot 3 \cdot 37 = 4 \cdot 111 = 444$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

b) Deoarece $111 \cdot 1001 = 111 \cdot (1000 + 1) = 111000 + 111 = 111111$, numărul 1001 este monoton. Cum 1000 nu este monoton, deducem că cel mai mic număr monoton de 4 cifre este 1001. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

c) De exemplu, numărul 1225 nu este monoton, pentru că orice multiplu par al său se termină în cifra 0, deci nu poate avea toate cifrele egale, iar multiplii impari ai lui 1225 se termină în 25 sau 75 (din criteriul de divizibilitate cu 25), deci nici ei nu pot avea toate cifrele egale (niciun multiplu de 25 nu este monoton). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

Probabil baronul avea în vedere o demonstraţie asemănătoare cu cea din soluţia alternativă de mai jos, însă proprietatea demonstrată acolo nu mai este adevărată pentru numerele care nu sunt relativ prime cu 10.

*Soluţie alternativă pentru b)* (cu principiul cutiei). Orice număr $n$ cu proprietatea că $(n, 10) = 1$ are un multiplu cu toate cifrele egale cu 1. Într-adevăr, cel puţin două dintre numerele 1, 11, 111...1 ($n + 1$ de 1) dau acelaşi rest la împărţirea la $n$, deci diferenţa lor, care este de forma $11...1 \cdot 10^k$, se divide cu $n$. Cum numerele $n$ şi $10^k$ nu au niciun factor comun, numărul 11...1 se divide cu $n$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

**Problema 2.** Într-o urnă sunt 13 bile numerotate de la 1 la 13.

Aflaţi numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem din urnă pentru a fi siguri că printre numerele extrase există 3 cu proprietatea că unul dintre ele se divide cu diferenţa celorlalte două.

*Olimpiadă Serbia*

Soluţie

În urnă sunt 7 numere impare: 1, 3, 5, 7, 9, 11 şi 13.

Dacă extragem mai puţin de 8 numere atunci se poate întâmpla ca toate numerele extrase să fie impare şi cum diferenţa a două numere impare este un număr par, niciunul dintre aceste numere nu se divide cu diferenţa a două dintre ele. Aşadar, trebuie să extragem cel puţin 8 numere. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **4p**

Arătăm că dacă extragem 8 numere atunci printre ele există trei astfel încât unul dintre ele se divide cu diferenţa celorlalte două.

Într-adevăr, cel puţin două dintre cel 8 numere sunt consecutive, pentru că în caz contrar diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic ar fi cel puţin $2 \cdot 7 = 14$, deci cel mai mare număr extras ar fi mai mare sau egal cu 15, ceea ce nu se poate. . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

Diferenţa celor două numere consecutive fiind 1, divide oricare dintre celelalte numere şi astfel problema este rezolvată. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

**Problema 3.** Numerele 21, 23 şi 25 sunt 3 numere impare consecutive şi fiecare are suma cifrelor un număr prim.

a) Daţi un exemplu de 5 numere impare consecutive cu proprietatea că fiecare are suma cifrelor un număr prim.

b) Arătaţi că nu putem găsi 6 numere impare consecutive cu proprietatea că fiecare are suma cifrelor un număr prim.

*Dorel Miheţ*

Soluţie

a) Constatăm imediat că printre numerele cu mai puţin de 3 cifre nu există 5 numere impare consecutive cu suma cifrelor un număr prim.

Încercăm să găsim un exemplu printre numerele de 3 cifre. Scriind în ordine numerele impare de 3 cifre cu suma cifrelor un număr prim (101, 111, 113, 115, 131, 133, 137, 139, 151, 155, 157, 173, 179, 191, 193, **197, 199, 201, 203, 205**... ) găsim exemplul dorit: 197, 199, 201, 203, 205. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

*Soluţie alternativă pentru a)*

Printre oricare 3 numere impare consecutive există un multiplu de 3, adică un număr cu suma cifrelor multiplu de 3. Fiind un număr prim, suma cifrelor este 3 şi există doar două numere de 3 cifre cu această proprietate: 111 şi 201. Căutând printre vecinii impari ai lui 201 găsim exemplul 197, 199, 201, 203, 205. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

b) Folosim idea din soluţia alternativă: dacă şase numere impare consecutive ar avea suma cifrelor un număr prim, atunci unul dintre primele 3 şi cel cu 6 mai mare ar avea suma cifrelor 3. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

Însă numerele impare cu suma cifrelor 3 au ultima cifră egală cu 1, deci nu pot să difere prin 6. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

**Problema 4.** O enciclopedie este constituită din $n$ volume, cu $5 < n < 20$. Toate volumele au acelaşi număr de pagini şi în fiecare volum numerotarea paginilor începe de la 1. Ştiind că pentru numerotarea tuturor paginilor enciclopediei s-a folosit de 2023 de ori cifra 9, aflaţi:

a) câte volume are enciclopedia;

b) câte pagini are fiecare volum.

*Olimpiadă Franţa (prelucrare)*

Soluţie

Cifra 9 apare de acelaşi număr de ori în fiecare volum. Dacă ea apare de $k$ de ori în primul volum atunci $k \cdot n = 2023$, deci $n$ este un divizor al lui 2023 cuprins între 5 şi 20, şi cum $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$, $n$ este 7 sau 17. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Vom considera pe rând cele două posibilităţi:

1) $n = 7$.

Atunci $k = 289$, deci pentru numerotarea paginilor primului volum s-a folosit de 289 de ori cifra 9. .......................................................... **1p**

Pentru numerotarea primelor 99 de pagini se foloseşte de 20 de ori cifra 9, şi anume la numerotarea paginilor 9, 19, ..., 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99. La fel, folosim câte 20 de cifre de 9 pentru numerotarea paginilor 100-199, 200-299, ..., 800-899, iar pentru numerotarea paginilor 900-999 folosim de 100+20=120 de ori cifra 9. .... **1p**

Dacă primul volum ar avea 999 de pagini, atunci pentru numerotarea paginilor am folosi $20 \cdot 9 + 120 = 300$ de 9. Cei 11 de 9 în plus provin de la paginile 999, 998, 997, 996, 995, deci primul volum are 994 de pagini. ........................................... **1p**

2) $n = 17$.

Atunci $k = 7 \cdot 17 = 119$. Observăm că pentru numerotarea primelor 599 de pagini ale unui volum se folosesc 120 de cifre de 9, deci un volum cu 119 de 9 ar trebui să aibă doar 598 de pagini. Însă atunci nu ar apărea pagina 599 şi s-ar folosi doar 118 de 9.

Prin urmare nu se poate ca enciclopedia să aibă 17 volume. ...................... **3p**

Răspuns: a) 7 volume; b) 994 de pagini.

## CLASA a VI-a

**Problema 1.** Fie $S = ab + cd + ef - ad - be - cf$, unde $a, b, c, d, e, f$ sunt numere din mulţimea $\{-1, 1\}$.

a) Demonstraţi că $S \neq 6$.

b) Aflaţi mulţimea valorilor posibile ale lui $S$.

*Dorel Miheţ*

Soluţie

a) Dacă $S = 6$ atunci numerele $a \cdot b$, $c \cdot d$, $e \cdot f$ sunt egale cu 1, iar numerele $a \cdot d$, $b \cdot e$, $c \cdot f$ sunt egale cu $-1$, deci produsul $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) \cdot (e \cdot f) = (a \cdot d) \cdot (b \cdot e) \cdot (c \cdot f)$ este simultan 1 şi $-1$, ceea ce este absurd. Aşadar $S \neq 6$. .......................... **2p**

b) Fiecare din cei 6 termeni ai sumei este $\pm 1$, deci suma este un număr par. Am văzut că $S \neq 6$ şi la fel putem arăta că $S \neq -6$. Prin urmare $S$ poate avea eventual valorile $\pm 4, \pm 2$ şi 0. ................................................ **1p**

Putem obţine sumele $4, -4$ şi 0: de exemplu, pentru $a = b = c = d = 1$ şi $e = f = -1$ suma este 4, pentru $a = b = c = d = e = f = 1$ suma este 0, iar pentru $a = 1, b = -1, c = -1, d = 1, e = 1, f = -1$ suma este $-4$. ................................ **2p**

Dacă ar $S$ ar fi 2, atunci ar avea 2 termeni egali cu -1 şi 4 termeni egali cu 1, iar dacă ar fi $-2$ ar avea 4 termeni egali cu $-1$ şi 2 termeni egali cu 1. În ambele cazuri produsul celor 6 termeni ar fi 1, pe când el este $(ab) \cdot (cd) \cdot (ef) \cdot (-ad) \cdot (-be) \cdot (-cf) = -(abcdef)^2 = -1$.

Prin urmare $S \neq \pm 2$, deci $S$ are doar 3 valori distincte: $-4, 0$ şi 4. ............... **2p**

*Soluţie alternativă 1*

Suma are 6 termeni $\pm 1$, care au produsul $-(abcdef)^2 = -1$, deci 1, 3 sau 5 termeni sunt $-1$. ................................................................ **3p**

Corespunzător, $S$ ia valorile $5 - 1 = 4, 3 - 3 = 0, 1 - 5 = -4$, deci $S$ are cel mult 3 valori distincte. ................................................ **2p**

Pentru $a = b = c = d = 1, e = f = -1$ (de exemplu) $S$ are un singur termen negativ, $S$ are 3 termeni negativi de exemplu pentru $a = 1, b = c = d = e = f = -1$ şi 5 termeni negativi de exemplu pentru $a = b = 1, c = -1, d = 1, e = 1, f = -1$, deci toate cele 3 valori pentru $S$ sunt posibile, iar printre ele nu se află 6 ........................... **2p**

*Soluţie alternativă 2*

Dacă schimbăm semnul unuia dintre numerele $a, b, c, d, e, f$, termenii care conţin acest număr îşi schimbă semnul, deci 2 termeni din sumă îşi schimbă semnul, prin urmare suma sau rămâne neschimbată, sau creşte cu 4, sau scade cu 4. ......................... **3p**

Când $a = b = c = d = e = f = 1$ suma este 0 şi cum $| S | \leq 6$, în afară de 0 $S$ mai poate lua valorile 4 şi $-4$, deci $S \neq 6$. ........................................ **2p**

Valoarea 4 se obţine de exemplu prntru $a = b = c = d = 1, e = f = -1$, iar valoarea $-4$ pentru $a = b = 1, c = -1, d = 1, e = 1, f = -1$. ............................... **2p**

**Problema 2.** Spunem că un număr natural $n > 2$, diferit de un număr prim, este "lucky" dacă este egal cu produsul divizorilor săi proprii pozitivi. De exemplu, numerele 6 şi 8 sunt lucky.

a) Demonstraţi că pătratele perfecte nu sunt lucky.

b) Câte numere naturale cuprise între 100 şi 200 sunt lucky?

*Folclor*

Soluţie

a) Un pătrat perfect $n$ are un număr impar de divizori. pozitivi. Dacă are doar trei atunci el are un singur divizor propriu, care este mai mic decât $n$, deci $n$ nu este lucky. Dacă $n$ are 5 sau mai mulţi divizori pozitivi, $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 \leq d_k = n$, atunci $\frac{n}{d_2} = d_{k-1} \geq d_4$, deci $d_2$, $\frac{n}{d_2}$ şi $d_3$ sunt fi divizori proprii ai lui $n$ cu produsul $n \cdot d_3 > n$, şi nici în acest caz $n$ nu este lucky. .......................................... **3p**

b) Din demonstraţia de la a) rezultă că un număr lucky are 4 divizori. .......... **1p**

Reciproc, orice număr cu 4 divizori este lucky, pentru că dacă $n$ are 4 divizori atunci $n = p^3$ sau $n = p \cdot q$, cu $p, q$ numere prime distincte. Dacă $n = p^3$ atunci produsul divizorilor săi proprii este $p \cdot p^2 = n$, iar dacă $n = pq$ atunci produsul divizorilor săi proprii este $p \cdot q = n$, deci $n$ este lucky.

Aşadar mulţimea numerelor lucky coincide cu e mulţimea numerelor care au 4 divizori pozitivi. .......................................................... **1p**

Cele 25 de numere prime mai mici decât 100 sunt: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Între 100 şi 200 sunt 10 de numere de forma $2 \cdot p$ $(2 \cdot 53, ..., 2 \cdot 97)$, 7 numere de forma $3 \cdot p$ $(3 \cdot 37, ..., 3 \cdot 61)$, 4 numere de forma $5 \cdot p$ $(5 \cdot 23, 5 \cdot 29, 5 \cdot 31, 5 \cdot 37)$, 3 numere de forma $7 \cdot p$ $(7 \cdot 17, 7 \cdot 19, 7 \cdot 23)$, 2 numere de forma $11 \cdot p$ $(11 \cdot 13, 11 \cdot 17)$ şi un număr de forma $p^3$ $(5^3)$, deci între 100 şi 200 sunt 27 de numere lucky. .............................. **2p**

*Metode alternative pentru a demonstra că numerele lucky sunt numerele cu 4 divizori pozitivi*

*Metoda 1.* Descompunem $n$ în factori primi. Dacă descompunerea ar fi de forma $p^k$ cu $k \geq 4$, atunci $p^{k-1}$ şi $p^2$ ar fi divizori proprii cu produsul $p^{k+1} > n$.

Dacă în descompunere ar fi doi sau mai mulţi factori primi, iar unul dintre ei apare la un exponent mai mare decât 1, adică $n = p^m \cdot q \cdot ...$ cu $m \geq 2$, atunci $p^m$ şi $p$ ar fi divizori proprii cu produsul $p^{m+1}$, în care factorul prim $p$ apare la un exponent mai mare decât $m$. Dacă în descompunere ar fi cel puţin 3 factori $p, q.r$ la puterea 1, atunci $pq$ şi $pr$ ar fi divizori proprii, deci $n$ s-ar divide cu $p^2$. ........................................ **4p**

*Metoda 2.* Dacă divizorii lui $n$ sunt $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{k-1} < d_k = n$, atunci mulţimea divizorilor săi proprii este $\{d_2, ..., d_{k-1}\} = \{\frac{n}{d_2}, ..., \frac{n}{d_{k-1}}\}$.

Notând cu $P$ produsul lor rezultă $P = \frac{n^{k-2}}{P}$, deci $P^2 = n^{k-2}$.

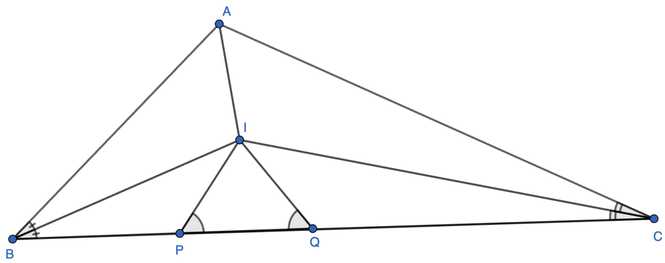
Prin urmare $n$ este lucky dacă şi numai dacă $P^2 = P^{k-2}$, adică dacă şi numai dacă $k = 4$. .................................................................. **4p**

**Problema 3.** Fie $BC$ cea mai mare latură a unui triunghi $ABC$. Pe această latură considerăm punctele $P$ şi $Q$ astfel încât $PC = AC$ şi $QB = AB$. Notăm cu $I$ punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare ale unghiurilor $B$ şi $C$ ale triunghiului.

Demonstraţi că $\angle PIQ + \angle BAC = 180°$.

*Olimpiadă Sankt Petersburg (enunţ modificat)*

Soluţie




Din ipoteză rezultă imediat că $\triangle ABI \equiv \triangle QBI$ şi $\triangle AIC \equiv \triangle PIC$ (LUL) ...... **3p**

Din prima congruenţă rezultă $\angle BAI = \angle IQB$, iar din a 2-a $\angle CAI = \angle IPC$, deci (prin adunare)

$$\angle BAC = \angle IQP + \angle IPQ = 180^\circ - \angle PIQ.$$

........................................................................ **4p**

*Soluţie alternativă*

$\triangle ABI \equiv \triangle QBI \Rightarrow AI = IQ$, $\triangle AIC \equiv \triangle PIC \Rightarrow AI = IP$, deci $IP = IQ$, adică triunghiul $IPQ$ este isoscel. .................................................. **4p**

Din prima congruenţă, $\angle IQB = \angle BAI = \dfrac{1}{2}\angle A$, deci $\angle PIQ = 180^\circ - 2\angle IQB = 180^\circ - \angle A$. ............................................................... **3p**

**Problema 4.** Notăm cu $u(a)$ ultima cifră a numărului natural $a$. Pentru fiecare număr natural nenul $n$ considerăm suma:

$$S(n) = u(d_1^4) + u(d_2^4) + ... + u(d_k^4),$$

unde $d_1 = 1, d_2, ..., d_k = n$ sunt divizorii săi pozitivi.

a) Arătaţi că dacă $n$ este impar şi $S(n) = 31$ atunci $n$ este pătrat perfect.

b) Aflaţi toate numerele impare $n$ mai mici decât $10^{15}$ pentru care $S(n) = 31$.

*Dorel Miheţ*

Soluţie

Fie $n$ un număr impar cu $S(n) = 31$.

a) Fiind impar, el are doar divizori impari, deci toţi cei $k$ termeni ai sumei sunt numere impare. Cum suma este 31, $k$ este impar. Având un număr impar de divizori, $n$ este pătrat perfect. ............................................................... **1p**

b) Puterea a 4-a a unui număr impar se termină sau în 1 sau în 5. .............. **1p**

Trebuie deci să luăm în considerare două cazuri:

1) $n$ nu se divide cu 5.

Atunci toţi termenii din $S(n)$ sunt 1, deci $k = 31$.

Aşadar $n$ are 31 de divizori şi cum 31 este prim, el este de forma $p^{30}$, cu $p$ prim. . **1p**

Cel mai mic astfel de număr, $n = 3^{30}$, este mai mic decât $10^{15}$ pentru că $3^2 < 10 \Rightarrow 3^{30} = (3^2)^{15} < 10^{15}$. ........................................................... **1p**

Următorul număr de această formă este deja mai mare decât $10^{15}$ pentru că $7^{30} > 4^{30} = 16^{15} > 10^{15}$. ........................................................... **1p**

2) $n$ este multiplu de 5.

Dacă 5 este singurul factor prim al lui $n$ atunci $n = 5^a$. Divizorii săi sunt $1, 5, 5^2, ..., 5^a$, deci $S(n) = 1 + 5a$, iar din $1 + 5a = 31$ rezultă $a = 6$. .............................. **1p**

Dacă $n$ ar mai avea şi alţi factori primi, el ar fi de forma $n = 5^a \cdot p^b \cdot ...$, unde $p$ este un număr prim diferit de 5, iar $a$ şi $b$ sunt numere pare nenule. Dar atunci $1, p, p^2, 5, 5^2, 5p, 5p^2, 5^2p, 5^2p^2$ s-ar afla printre divizorii lui $n$, deci $S(n) \geq 33$, ceea ce este absurd. ...................................................................................... **1p**

Prin urmare există doar două numere cu proprietatea din enunţ: $5^6$ şi $3^{30}$.

## CLASA a VII-a

**Problema 1.** Aflaţi numerele naturale $n$ pentru care numărul $\mid 2^n + 5^n - 65 \mid$ este pătrat perfect.

*Olimpiadă Ucraina*

Soluţie

Dacă $n < 3$ atunci $\mid 2^n + 5^n - 65 \mid = 65 - 2^n - 5^n$ şi obţinem un pătrat perfect doar pentru $n = 2$, când $65 - 2^n - 5^n = 65 - 4 - 25 = 36$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Dacă $n \geq 3$ atunci $\mid 2^n + 5^n - 65 \mid = 2^n + 5^n - 65$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Un număr de această formă are terminaţie de pătrat perfect doar dacă $n$ este par, deci $n = 2k$ cu $k \geq 2$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Pentru $k = 2$ obţinem numărul $16 + 625 - 65 = 576 = 24^2$, . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Pentru $k = 3$ obţinem numărul $125^2 - 1 = 124 \cdot 126$, care nu este pătrat perfect (pătratele perfecte care diferă prin 1 sunt 0 şi 1, sau observăm că este cuprins între $124^2$ şi $125^2$ şi este diferit de $125^2$) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Dacă $k > 3$ atunci $25^k + 4^k - 65$ este mai mare decât $25^k$ şi cum este mai mic decât $(5^k + 1)^2 = 25^k + 2 \cdot 5^k + 1$, nu este pătrat perfect. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**

**Problema 2.** Notăm cu $\sigma(M)$ suma elementelor mulţimii $M$. Fie $A$ o mulţime de $k \geq 3$ numere naturale nenule cu $\sigma(A) = 2n$. Spunem că $a \in A$ este separator dacă există două mulţimi nevide $X$, $Y$ astfel încât $X \cup Y = A \setminus \{a\}, X \cap Y = \varnothing$ şi $\sigma(X) \leq n$, $\sigma(Y) \leq n$. De exemplu $5, 9$ şi $11$ sunt separatori pentru mulţimea $\{1, 5, 9, 11\}$.

Fie $S$ mulţimea separatorilor mulţimii $A$.

a) Demonstraţi că $\sigma(S) \neq n$.

b) Aflaţi cea mai mică valoare pe care o poate avea $\sigma(S)$ când $k = 4$ şi $\sigma(A) = 16$.

c) Demonstraţi că $\sigma(S) > n$.

*Olimpiadă Serbia (prelucrare)*

Soluţie

a) Presupunem, prin reducere la absurd, că $\sigma(S) = n$. Atunci suma elementelor din $A \setminus S$ este $n$, iar dacă $a$ este un element arbitrar din $A \setminus S$ atunci $A \setminus \{a\} = X \cup Y$, unde $X = (A \setminus S) \setminus \{a\}$, $Y = S$ şi $\sigma(X) < n, \sigma(Y) = n$, deci $a \in S$, ceea ce este absurd. . . **2p**

b) Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, cu $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

Evident, $a_1 < 8$. Dacă $a_1 + a_2 \geq 8$, atunci $a_3 + a_4 \leq 8$, deci $a_2$ este separator, pentru că $A \setminus \{a_2\} = \{a_1\} \cup \{a_3, a_4\}$. Cum orice element din $A$ mai mare decât un separator este separator, mulţimea separatorilor este $\{a_2, a_3, a_4\}$, iar $\sigma(S) = 16 - a_1 > 8$. . . . . . . **1p**

Dacă $a_1 + a_2 < n$ şi $a_1 + a_2 + a_3 \geq 8$, atunci $a_3$ este separator, pentru că $A \setminus \{a_3\} = \{a_1, a_2\} \cup \{a_4\}$ şi $a_4 \leq 8$, deci $S = \{a_3, a_4\}$, iar $\sigma(S) = a_3 + a_4 > 8$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Dacă $a_1 + a_2 + a_3 < 8$ atunci $a_4$ este singurul separator, iar $\sigma(S) = a_4 > 8$.

Aşadar întotdeauna $\sigma(S) > 8$, şi cum mulţimea $A = \{1, 2, 4, 9\}$ are $\sigma(S) = 9$, cea mai mică valoare pe care o poate avea $\sigma(S)$ este 9. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

c) Procedăm ca la b): dacă $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$ cu $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_k$, deoarece $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = 2n$, $a_1$ este mai mic decât $n$. Considerăm sumele: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ...$ şi fie $l$ cel mai mare număr cu proprietatea $a_1 + ... + a_l < n$ (adică $a_1 + ... + a_l < n$ şi $a_1 + ... + a_l + a_{l+1} \geq n$).

Atunci $a_{l+1}, ..., a_k$ sunt separatori pentru că $A \setminus \{a_{l+j}\} = X \cup Y$, unde

$$X = \{a_1, ..., a_l\}, Y = \{a_{l+1}, ..., a_k\} \setminus \{a_{l+j}\},$$

şi fiecare din mulţimile $X$ şi $Y$ are suma elementelor mai mică sau egală cu $n$ (pentru că $a_{l+2} + ... + a_k \leq n$).

Aşadar $\sigma(S) \geq a_{l+1} + ... + a_k = 2n - (a_1 + ...a_l) > 2n - n = n$. .................. **2p**

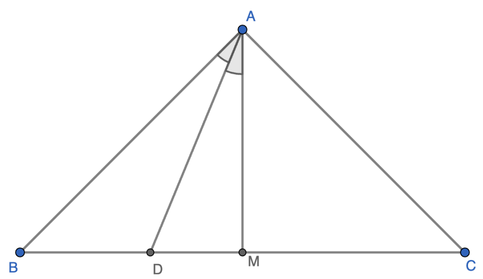
*Notă.* Rezolvarea punctului c) atrage şi acordarea celor 2p de la a), chiar dacă la a) nu este o rezolvare explicită.

**Problema 3.** Pe ipotenuza $BC$ a triunghiului dreptunghic $ABC$ se consideră punctul $D$ astfel încât $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Aflaţi măsura unghiuliul $ACB$ ştiind că $DC = AB$.

*Romantics of geometry*

Soluţie




Fie $M$ mijlocul ipotenuzei. Atunci $\angle ABC = \angle BAM$, deci $AD$ este bisectoarea unghiului $A$ în triunghiul $ABM$. ..................................................... **2p**

Din teorema bisectoarei rezultă că $\dfrac{BD}{DM} = \dfrac{AB}{AM}$.

Cu notaţiile uzuale ($AB = c, BC = a, CA = b$), folosind ipoteza obţinem:

$$BM = \frac{a}{2} = AM, BD = BC - DC = a - c, DM = DC - MC = c - \frac{a}{2},$$

prin urmare

$$\frac{c}{\frac{a}{2}} = \frac{a-c}{c - \frac{a}{2}} \ldots \mathbf{3p}.$$

Din această egalitate rezultă $2c^2 = a^2$, deci $2c^2 = b^2 + c^2$. Aşar triunghiul $ABC$ este dreptunghic isoscel, de unde $\angle C = 45°$. ........................................... **2p**

**Problema 4.** Tangentele în punctele $B$ şi $C$ la cercul circumscris triunghiului ascuţitunghic $ABC$ se intersectează în punctul $P$. Notăm cu $D$ şi $E$ respectiv picioarele perpendicularelor din $P$ pe dreptele $AB$ şi $AC$, iar cu $M$ mijlocul laturii $BC$.

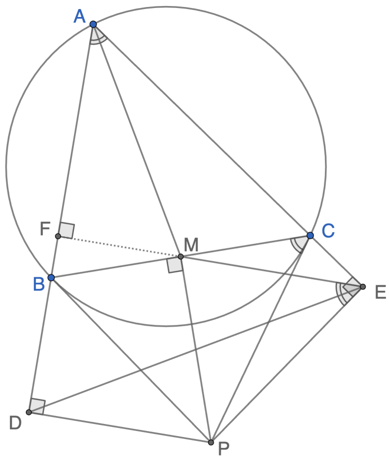
Demonstraţi că $AM \perp DE$.

*Folclor*

Soluţie

Vom demonstra că $M$ este ortocentrul triunghiului $ADE$.

Arătăm mai întâi că $EM \perp AD$.




Fiind mediană corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel $PBC$, $PM$ este perpendiculară pe $BC$. .......................................................................... **1p**

Rezultă că $PMCE$ este patrulater inscriptibil, deci

$$\angle PCM = \angle MEP = 90^\circ - \angle AEM.$$

Cum $\angle PCM = \angle BAC$ (unghi format de o tangentă cu o coardă), $\angle BAC + \angle AEM = 90^\circ$, adică $EM \perp AD$. .......................................................................... **3p**

Analog, $DM \perp AE$, deci $M$ este ortocentrul triunghiului $ADE$. .................. **2p**

Aşadar $AM \perp DE$, ceea ce trebuia demonstrat. .................................. **1p**

## CLASA a VIII-a

**Problema 1.** Aflaţi numerele reale $x, y, z$ din egalitatea:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3.$$

*Olimpiada "Maraton intelectual"*

Soluţie

Folosim inegalitatea $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbb{R})$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b$.

Din această inegalitate rezultă:

$x\sqrt{1-y^2} \leq \dfrac{x^2+1-y^2}{2},\ \ y\sqrt{2-z^2} \leq \dfrac{y^2+2-z^2}{2},\ \ z\sqrt{3-x^2} \leq \dfrac{z^2+3-x^2}{2}$.

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi obţinem

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}\leq 3.\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{4p}$$

Pentru egalitate trebuie ca $x=\sqrt{1-y^2}, y=\sqrt{2-z^2}$ şi $z=\sqrt{3-x^2}$, deci $x^2=1-y^2, y^2=2-z^2, z^2=3-x^2$. .......................................................... **1p**

Din egalităţile de mai sus rezultă $x^2+y^2=1, y^2+z^2=2, z^2+x^2=3$, de unde deducem mai întâi (prin adunare) că $x^2+y^2+z^2=3$ şi apoi $z^2=2, x^2=1, y^2=0$, deci $x=\pm 1, y=0, z=\pm\sqrt{2}$. .......................................................... **1p**

Însă numerele $x=\sqrt{1-y^2}$ şi $z=\sqrt{3-x^2}$ nu pot fi negative, deci numerele căutate sunt $x=1, y=0, z=\sqrt{2}$ (şi ele verifică într-adevă egalitatea din enunţ) ............ **1p**

*Soluţie alternativă*

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz,

$$(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2})^2 \leq (x^2+y^2+z^2)(6-x^2-y^2-z^2)=$$

$$=6(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)^2\leq 9,$$

deci $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}\leq 3$ ........................................ **4p**

Pentru egalitate trebuie ca $x^2+y^2+z^2=3$ şi să avem egalitate în C-B-S. Egalitatea în inegalitatea C-B-S are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=0$ sau există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $x=\lambda\sqrt{1-y^2}, y=\lambda\sqrt{2-z^2}, z=\lambda\sqrt{3-x^2}$ ................................ **1p**

Deoarece $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$, numerele $x, y, z$ nu sunt simultan nule, deci $x^2=\lambda^2(1-y^2)$, $y^2=\lambda^2(2-z^2)$, $z^2=\lambda^2(3-x^2)$. Prin adunare, ţinând seama de egalitatea $x^2+y^2+z^2=3$ şi de inegalitatea $\lambda>0$ obţinem $\lambda=1$ şi apoi $x=1, y=0, z=\sqrt{2}$. .......................................................... **2p**

**Problema 2.** Demonstraţi că dacă $n$ este un număr natural mai mare sau egal cu 2, iar $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt numere reale din intervalul $[0,1]$, atunci

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n+(1-x_1^2)\cdot(1-x_2^2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n^2)\leq 1.$$

Când are loc egalitatea?

*Dorel Miheţ*

Soluţie

În demonstraţie vom folosi în mod esenţial următoarea proprietate: dacă $a, b \in [0,1]$ atunci $ab \le a$, care rezultă din $ab - a = a(b-1) \le 0$.

Considerăm mai întâi cazul $n = 2$.

Fie $x_1, x_2$ două numere arbitrare din intervalul $[0,1]$. Atunci

$$x_1x_2 + (1-x_1^2)(1-x_2^2) - 1 = x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 \le$$

$$\le x_1x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 = -(x_1-x_2)^2 \le 0.$$

Aşadar $x_1x_2 + (1-x_1^2)(1-x_2^2) \le 1$, deci inegalitatea este adevărată când $n = 2$. . **2p**

Dacă $n > 2$ atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 \cdot ... \cdot x_n) \le x_1 \cdot x_2$ şi la fel $(1-x_1^2) \cdot (1-x_2^2) \cdot ... \cdot (1-x_n^2) \le (1-x_1^2)(1-x_2^2)$, deci

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n + (1-x_1^2) \cdot (1-x_2)^2 \cdot ... \cdot (1-x_n^2) \le x_1 \cdot x_2 + (1-x_1^2)(1-x_2^2) \le 1 \text{. . . . } \mathbf{2p}$$

Urmărind demonstraţia inegalităţii $x_1x_2 + (1-x_1^2)(1-x_2^2) \le 1$ constatăm că egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1^2x_2^2 = x_1x_2$ şi $x_1 = x_2$, adică dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = 0$ sau $x_1 = x_2 = 1$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Am văzut de asemenea că pentru $n > 2$ are loc dubla inegalitate:

$$x_1 \cdot ... \cdot x_n + (1-x_1^2) \cdot ... \cdot (1-x_n^2) \le x_1 \cdot x_2 + (1-x_1^2)(1-x_2^2) \le 1,$$

deci pentru egalitate trebuie să avem egalitate în cazul $n = 2$, adică în mod necesar $x_1 = x_2 = 1$ sau $x_1 = x_2 = 0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

Dacă $x_1 = x_2 = 1$ şi există $k > 2$ cu $x_k \ne 1$ atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \le x_k < 1$ şi $(1-x_1^2) \cdot (1-x_2^2) \cdot ... \cdot (1-x_n^2) = 0$. deci nu avem egalitate.

La fel, dacă $x_1 = x_2 = 0$ şi există $k > 2$ astfel încât $x_k \ne 0$ atunci $x_1 \cdot ... \cdot x_n = 0$ şi $(1-x_1^2) \cdot (1-x_2^2) \cdot ... \cdot (1-x_n^2) \le (1-x_k)^2 < 1$, deci din nou nu avem egalitate.

Prin urmare egalitatea are loc când toate numerele $x_1, ..., x_n$ sunt 1 sau toate numerele $x_1, ..., x_n$ sunt 0. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

O soluţie asemănătoare se poate obţine prin inducţie.

**Problema 3.** Notăm cu $\Delta(n)$ numărul de reprezentări ale unui număr natural nenul $n$ ca sumă de două sau mai multe numere naturale consecutive nenule.

a) Aflaţi $\Delta(2024)$.

b) Câte numere naturale nenule $n$ mai mici decât 2024 au proprietatea că $\Delta(n)$ este un număr impar?

*Folclor*

Soluţie

a) Dacă $2024 = (m+1) + (m+2) + ... + (m+n)$ $(n > 1)$, atunci

$$n(2m+n+1) = 2 \cdot 2024 = 2^4 \cdot 11 \cdot 23.$$

Deoarece $n$ şi $2m+n+1$ au parităţi diferite, unul dintre ele este un divizor impar $d$ diferit de 1 al lui 2048, iar celălalt este $\dfrac{2048}{d}$.

Divizorii impari diferiţi de 1 ai lui 4048 sunt $11, 23$ şi $11 \cdot 23$. Cum $n < 2m+n+1$, avem următoarele posibilităţi:

$n = 11$, $2m + n + 1 = 368$, cu soluţia $n = 11, m = 178$; $n = 23$, $2m + n + 1 = 176$, cu soluţia $n = 23, m = 76$; $2m + n + 1 = 253$, $n = 16$, cu soluţia $n = 16, m = 118$.

Aşadar $\Delta(2024) = 3$. .......................................................... **2p**

b) Procedând ca în soluţia de la a) putem demonstra că $\Delta(n) = D - 1$, unde $D$ este numărul divizorilor pozitivi impari ai lui $n$.

Într-adevăr, dacă $a = (m + 1) + (m + 2) + ... + (m + n)$ este o reprezentare a lui $a$ ca sumă de $n \geq 2$ numere naturale consecutive atunci $n(2m + n + 1) = 2a$, şi cum numerele $n$ şi $2m + n + 1$ au parităţi diferite, unul dintre ele este un divizor impar $d$ al lui $a$ diferit de 1, iar celălalt este $\frac{2a}{d}$. Prin urmare, oricărei reprezentări a lui $a$ ca sumă de $n \geq 2$ numere consecutive îi corespunde un divizor impar mai mare decât 1 al lui $a$. ........ **1p**

Reciproc, oricărui divizor impar $d > 1$ al lui $a$ îi corespunde o reprezentare a lui $a$ ca sumă de $n \geq 2$ numere consecutive, şi anume reprezentarea: $a = (m + 1) + ... + (m + n)$, unde $n = min\{d, \frac{2a}{d}\}$, $m = \dfrac{\mid \frac{2a}{d} - d \mid -1}{2}$. ...................................... **1p**

Trebuie deci să aflăm câte numere mai mici decât 2024 au un număr par de divizori impari. Este mai uşor să aflăm câte numere au un număr impar de divizori impari, pentru că $n = 2^k(2l + 1)$ are un număr impar de divizori impari dacă şi numai dacă $2l + 1$ are un număr impar de divizori, adică dacă şi numai dacă $2l + 1$ este pătrat perfect. ... **1p**

Prin urmare $n$ are un număr impar de divizori impari dacă şi numai dacă este pătrat perfect (când $k$ este par) sau dublul unui pătrat perfect (când $k$ este impar).

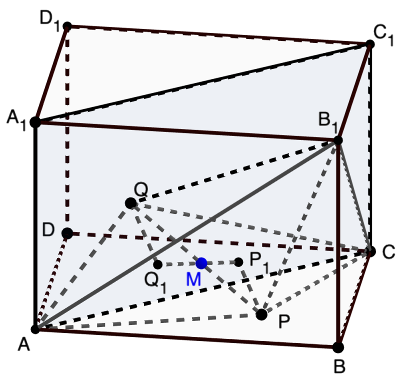
Deoarece pătratele perfecte nenule mai mici decât 2024 sunt $1^2, 2^2, ..., 44^2$, iar numerele de forma $2 \cdot s^2$ mai mici decât 2024 sunt $2 \cdot 1, 2 \cdot 4, ..., 2 \cdot 31^2$, rezultă că $2024 - 75 = 1949$ de numere naturale nenule au un număr par de divizori impari. ..................... **2p**

**Problema 4.** Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelipiped dreptunghic. În interiorul triunghiului $ABC$ se consideră punctul $P$, iar în ineriorul dreptunghiului $ACC_1A_1$ punctul $Q$, astfel încât $PQ \parallel (ACD_1)$. Dreapta $PQ$ intersectează planul $(ACB_1)$ în $M$.

Demonstraţi că $M$ este mijlocul segmentului $[PQ]$.

*Olimpiadă Sankt Petersburg*

Soluţie




Fie $P_1$ şi $Q_1$ proiecţiile punctelor $P$ şi $Q$ pe planul $ACB_1$.

Atunci $PP_1 \parallel QQ_1$ deci $QM = MP$ dacă şi numai dacă $QQ_1 = PP_1$, adică dacă şi numai dacă $V_{QACB_1} = V_{PACB_1}$. ............................................. **2p**

Vom demonstra că $V_{QACB_1} = V_{PACB_1}$, folosind repetat următoarea proprietate: dacă $d \parallel \alpha$ şi $U, V \in d$ atunci $d(U, \alpha) = d(V, \alpha)$.

Astfel, considerând ca bază pentru piramida $QACB_1$ triunghiul $QAC$, din proprietatea enunţată rezultă că $V_{QACB_1} = V_{QACB}$ (pentru că $BB_1 \parallel (QAC)$).

Din $\triangle ACB \equiv \triangle CAD$ rezultă $V_{QACB} = V_{QACD}$ şi apoi, succesiv:

$V_{QACD} = V_{QACD_1}$ (pentru că $DD_1 \parallel (QAC)$)

$V_{QACD_1} = V_{PACD_1}$ (pentru că $PQ \parallel (ACD_1)$)

$V_{PACD_1} = V_{PACB_1}$ (pentru că $B_1D_1 \parallel (PAC)$).

Aşadar $V_{QACB_1} = V_{PACB_1}$, ceea ce trebuia demonstrat. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **5p**