Concursul Interdisciplinar de Matematică şi Informatică
"Grigore C. Moisil" - Ediţia a XXXVI-a

Oradea, 22-24 Martie 2024

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Spunem că un număr natural n este "monoton" dacă are cel puţin un multiplu nenul cu toate cifrele egale. De exemplu, numărul 37 este monoton, pentru că $3 \cdot 37 = 111$.

a) Arătaţi că numărul 12 este monoton.

b) Care este cel mai mic număr monoton de 4 cifre?

c) Baronul Műnchhausen susţine că toate numerele naturale de 4 cifre care nu se divid cu 10 sunt monotone. Arătaţi-i că nu are dreptate!

Folclor

PROBLEMA 2. Într-o urnă sunt 13 bile numerotate de la 1 la 13.
Aflaţi numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem din urnă pentru a fi siguri că printre numerele extrase există 3 cu proprietatea că unul dintre ele se divide cu diferenţa celorlalte două.

Olimpiadă Serbia

PROBLEMA 3. Numerele 21, 23 şi 25 sunt 3 numere impare consecutive şi fiecare are suma cifrelor un număr prim.

a) Daţi un exemplu de 5 numere impare consecutive cu proprietatea că fiecare are suma cifrelor un număr prim.

b) Arătaţi că nu putem găsi 6 numere impare consecutive cu proprietatea că fiecare are suma cifrelor un număr prim.

Dorel Miheţ

PROBLEMA 4. O enciclopedie este constituită din n volume, cu $5 < n < 20$. Toate volumele au acelaşi număr de pagini şi în fiecare volum numerotarea paginilor începe de la 1. Ştiind că pentru numerotarea tuturor paginilor enciclopediei s-a folosit de 2023 de ori cifra 9, aflaţi:

a) câte volume are enciclopedia;

b) câte pagini are fiecare volum.

Olimpiadă Franţa (prelucrare)

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Fie $S = ab + cd + ef - ad - be - cf$, unde a, b, c, d, e, f sunt numere din mulţimea $\{-1, 1\}$.

a) Demonstraţi că $S \neq 6$.

b) Aflaţi mulţimea valorilor posibile ale lui S.

Dorel Miheţ

PROBLEMA 2. Spunem că un număr natural $n > 2$, diferit de un număr prim, este "lucky" dacă este egal cu produsul divizorilor săi proprii pozitivi. De exemplu, numerele 6 şi 8 sunt lucky.

a) Demonstraţi că pătratele perfecte nu sunt lucky.

b) Câte numere naturale cuprise între 100 şi 200 sunt lucky?

Folclor

PROBLEMA 3. Fie BC cea mai mare latură a unui triunghi ABC. Pe această latură considerăm punctele P şi Q astfel încât $PC = AC$ şi $QB = AB$. Notăm cu I punctul de intersecţie al bisectoarelor interioare ale unghiurilor B şi C ale triunghiului.
Demonstraţi că $\angle PIQ + \angle BAC = 180°$.

Olimpiadă Sankt Petersburg

PROBLEMA 4. Notăm cu $u(a)$ ultima cifră a numărului natural a. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm suma:

$$S(n) = u(d_1^4) + u(d_2^4) + ... + u(d_k^4),$$

unde $d_1 = 1,\ d_2, ..., d_k = n$ sunt divizorii săi pozitivi.

a) Arătaţi că dacă n este impar şi $S(n) = 31$ atunci n este pătrat perfect.

b) Aflaţi toate numerele impare n mai mici decât 10^{15} pentru care $S(n) = 31$.

Dorel Miheţ

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Concursul Interdisciplinar de Matematică și Informatică
“Grigore C. Moisil” - Ediția a XXXVI-a

Oradea, 22-24 Martie 2024

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul $|2^n + 5^n - 65|$ este pătrat perfect.

Olimpiadă Ucraina

PROBLEMA 2. Notăm cu $\sigma(M)$ suma elementelor mulţimii M.
Fie A o mulţime de $k \geq 3$ numere naturale nenule cu $\sigma(A) = 2n$. Spunem că $a \in A$ este separator dacă există două mulţimi nevide X, Y astfel încât $X \cup Y = A \setminus \{a\}$, $X \cap Y = \varnothing$ şi $\sigma(X) \leq n$, $\sigma(Y) \leq n$.
De exemplu 5, 9 şi 11 sunt separatori pentru mulţimea $\{1, 5, 9, 11\}$.
Fie S mulţimea separatorilor mulţimii A.

a) Demonstraţi că $\sigma(S) \neq n$.

b) Aflaţi cea mai mică valoare pe care o poate avea $\sigma(S)$ când $k = 4$ şi $\sigma(A) = 16$.

c) Demonstraţi că $\sigma(S) > n$.

Olimpiadă Serbia (prelucrare)

PROBLEMA 3. Pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC se consideră punctul D, astfel încât $\angle BAD = \dfrac{1}{2}\angle ABC$. Aflaţi măsura unghiului ACB, ştiind că $DC = AB$.

Romantics of geometry

PROBLEMA 4. Tangentele în punctele B şi C la cercul circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC se intersectează în punctul P. Notăm cu D şi E respectiv picioarele perpendicularelor din P pe dreptele AB şi AC, iar cu M mijlocul laturii BC.
Demonstraţi că $AM \perp DE$.

Folclor

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Concursul Interdisciplinar de Matematică și Informatică
"Grigore C. Moisil" - Ediția a XXXVI-a

Oradea, 22-24 Martie 2024

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Aflaţi numerele reale x, y, z din egalitatea:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3.$$

Olimpiada "Maraton Intelectual"

PROBLEMA 2. Demonstraţi că dacă n este un număr natural mai mare sau egal cu 2, iar $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt numere reale din intervalul $[0, 1]$, atunci

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n + (1 - x_1^2) \cdot (1 - x_2^2) \cdot ... \cdot (1 - x_n^2) \leq 1.$$

Când are loc egalitatea?

Dorel Miheţ

PROBLEMA 3. Notăm cu $\Delta(n)$ numărul de reprezentări ale unui număr natural nenul n ca sumă de două sau mai multe numere naturale consecutive nenule.

a) Aflaţi $\Delta(2024)$.

b) Câte numere naturale nenule n mai mici decât 2024 au proprietatea că $\Delta(n)$ este un număr impar?

Folclor

PROBLEMA 4. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelipiped dreptunghic. În interiorul triunghiului ABC se consideră punctul P, iar în interiorul dreptunghiului ACC_1A_1 punctul Q, astfel încât $PQ \parallel (ACD_1)$. Dreapta PQ intersectează planul (ACB_1) în M. Demonstraţi că M este mijlocul segmentului $[PQ]$.

Olimpiadă Sankt Petersburg

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Concursul Interdisciplinar de Matematică și Informatică
"Grigore C. Moisil" - Ediția a XXXVI-a

Oradea, 22-24 Martie 2024

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie $a, b, c \in [0, \infty)$, astfel încât $a + b + c = 1$. Demonstraţ că

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq (3a + b)(3b + c)(3c + a).$$

Mihai Opincariu

PROBLEMA 2. Aflaţi mulţimea A a numerelor naturale k cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât n se poate scrie atât ca sumă de k divizori naturali ai săi cât şi ca sumă de $k + 1$ divizori naturali ai săi, însă nu se poate scrie ca sumă de $k + 2$ divizori naturali ai săi (divizorii din aceste sume nu sunt neapărat distincţi).

Dorel Miheţ

PROBLEMA 3. Laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC sunt împărţite fiecare în câte $n + 1$ părţi egale de către punctele $A_1, A_2, ..., A_n$, $B_1, B_2, ..., B_n$, respectiv $C_1, C_2, ..., C_n$, unde $n \geq 2$.
Ana şi Bogdan joacă următorul joc format din trei runde:

- Ana alege $X \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ şi $Y \in \{B_1, B_2, ..., B_n\}$,
- apoi Bogdan alege $Z \in \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ şi $T \in \{C_1, C_2, ..., C_n\}$,
- iar apoi Ana alege $V \in \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ şi $W \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

Dacă $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZT} + \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{0}$, atunci Ana câştigă. Altfel, câştigă Bogdan.
Determinaţi cine are strategia câştigătoare.

Cristi Săvescu

PROBLEMA 4. Fie ABC un triunghi şi M un punct în interiorul său. Paralela prin M la AB intersectează BC în N şi CA în R, paralela prin M la BC intersectează CA în Q şi AB în T, iar paralela prin M la CA intersectează AB în S şi BC în P.

a) Dovediţi că $\dfrac{NP}{a} + \dfrac{RQ}{b} + \dfrac{ST}{c} = 1$.

b) Dacă A', B' respectiv C' sunt simetricele lui M faţă de mijloacele segmentelor NP, QR, respectiv ST, demonstraţi că $2 \max\{AA', BB', CC'\} < AA' + BB' + CC'$.

* * *

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Determinaţi funcţiile crescătoare $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f\left(\frac{x+g(x)}{2}\right)=\frac{x+g(x)}{2} \quad \text{şi} \quad g\left(\frac{x+f(x)}{2}\right)=\frac{x+f(x)}{2}.$$

Mihai Opincariu

PROBLEMA 2. Fie A o mulţime nevidă şi $f, g : A \to A$ două funcţii cu proprietăţile:

i) Pentru orice $x \in A$, $f(x) = x$ sau $g(x) = x$.

ii) Există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(f \circ g)^k = 1_A$.

Demonstraţi că:

a) Dacă $x_0 \in A$ şi $f(x_0) = x_1 \neq x_0$, atunci $g(x_1) = x_1$.

b) $f^k = g^k = 1_A$.

($f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k-ori}$, iar $1_A(x) = x$, $\forall\, x \in A$)

Dorel Miheţ

PROBLEMA 3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, distincte două câte două, de acelaşi modul r şi cu suma egală cu s. Demonstraţi că, dacă $z_1 + \frac{rs}{z_1}$, $z_2 + \frac{rs}{z_2}$ şi $z_3 + \frac{rs}{z_3}$ sunt reale, atunci z_1, z_2 şi z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

Mihai Opincariu

PROBLEMA 4. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri care au acelaşi centru de greutate, iar punctele A', B', C' se află pe laturile sau în interiorul triunghiului ABC. Să se arate că pentru orice $p \geq 1$ şi orice M din plan, are loc inegalitatea $A'M^p + B'M^p + C'M^p \leq AM^p + BM^p + CM^p$.

Dan-Ştefan Marinescu

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Concursul Interdisciplinar de Matematică și Informatică
"Grigore C. Moisil" - Ediția a XXXVI-a

Oradea, 22-24 Martie 2024

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $\det(AB) = 1$. Demonstraţi că $(AB - BA)^2 = O_2$, dacă şi numai dacă $A^{-1}B^{-1}AB + B^{-1}A^{-1}BA = 2I_2$.

Mihai Opincariu

PROBLEMA 2. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ şi M o mulţime de $n+1$ numere complexe. Demonstraţi că există $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ cu proprietatea că putem alege k elemente ale mulţimii M astfel încât înlocuind k elemente ale matricei A cu aceste elemente să obţinem o matrice inversabilă.

Dorel Miheţ

PROBLEMA 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită cu proprietatea că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi orice şiruri strict monotone $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, ambele convergente la a, are loc relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{f(y_n)} = 1$.

a) Daţi exemplu de o astfel de funcţie, care să nu fie continuă.

b) Dacă f are proprietatea lui Darboux, arătaţi că f este continuă.

Cristi Săvescu

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$|t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + t_3 f(x_3)| \leq |t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3|,$$

pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ cu $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

Dan-Ştefan Marinescu

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie p un număr prim impar şi $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, ..., A_p\} \subset GL_2(\mathbb{R})$ (grupul matricelor inversabile de ordinul 2 cu elemente reale), o mulţime cu proprietatea:

$$A \cdot B \in \mathcal{M},\ \forall\ A, B \in \mathcal{M}.$$

a) Demonstraţi că $A_1 + A_2 + ... + A_p = O_2$.

b) Rămâne proprietatea de la a) adevărată dacă $\mathcal{M} \subset GL_2(\mathbb{C})$?

Dorel Miheţ

PROBLEMA 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x^{2^n+2} = x^{2^n-1}$, pentru orice $x \in A$. Demonstraţi că $x^4 = x$, pentru orice $x \in A$.

Mihai Opincariu

PROBLEMA 3. Fie $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi continuă, cu $f(1) = 0$ şi $f(2) \geq 0$. Să se arate că există $c \in [1, 2)$, astfel încât $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{2-c}{2c} \cdot f(2)$.

* * *

PROBLEMA 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în 0 şi integrabilă pe orice interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Să se arate că, dacă $\displaystyle\int_0^{x+y} f(t)\, dt \leq \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^y f(t)\, dt$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = f(0) \cdot (b - a)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Dan-Ştefan Marinescu

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.