Concursul Interdisciplinar de Matematică şi Informatică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXVI-a; Oradea, 22-24 Martie 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie $a, b, c \in [0, \infty)$, astfel încât $a+b+c=1$. Demonstraţ că
$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq (3a+b)(3b+c)(3c+a).$$

Barem de corectare.
Plecăm de la inegalitatea $\dfrac{x^2}{y} \geq 2x-y$, valabilă pentru orice $x, y \in (0,\infty)$ .... **(2p)**

Punând $x=1+a$ şi $y=1+c$, obţinem $\dfrac{(1+a)^2}{1+c} \geq 2(1+a)-(1+c)=1+2a-c$. Cum $a+b+c=1$, rezultă că $\dfrac{(1+a)^2}{1+c} \geq 3a+b$ (1) .... **(2p)**

Analog, obţinem $\dfrac{(1+b)^2}{1+a} \geq 3b+c$ (2) şi $\dfrac{(1+c)^2}{1+b} \geq 3c+a$ (3) .... **(1p)**

Înmulţind membru cu membru relaţiile $(1), (2)$ şi (3), după simplificarea termenilor asemenea, se obţine inegalitatea din enunţ. .... **(2p)**

PROBLEMA 2. Aflaţi mulţimea A a numerelor naturale k cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât n se poate scrie atât ca sumă de k divizori naturali ai săi cât şi ca sumă de $k+1$ divizori naturali ai săi, însă nu se poate scrie ca sumă de $k+2$ divizori naturali ai săi (divizorii din aceste sume nu sunt neapărat distincţi).

Barem de corectare. Vom demonstra că $A = \{2l+1 \mid l \in \mathbb{N}\}$.

a) Orice număr natural impar aparţine mulţimiii A.

   Dacă $k=2l+1$ atunci numărul $n=2l+2$ poate fi scris şi ca sumă de k divizori ai săi: $2l+2=2+1+...+1$ ($2l$ de 1) şi ca sumă de $k+1$ divizori ai săi: $2l+2=1+1+...+1$ ($2l+2$ de 1) dar nu poate fi scris ca suma de $k+2$ divizori ai săi, deoarece o astfel de sumă este cel puţin $1+1+...+1$ ($k+2$ de 1), deci este mai mare decât n. Aşadar $k \in A$. .... **(2p)**

b) Orice număr din A este impar.

   Fie $k \in A$. Ştim că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât a n este sumă de k şi de $k+1$ divizori ai săi, dar nu este sumă de $k+2$ divizori ai săi. Numărul n nu poate fi impar pentru că atunci el ar avea doar divizori impari, şi cum unul dintre numerele k şi $k+1$ este par, n ar fi suma unui număr par de numere impare deci ar fi par, absurd. Aşadar n este par, $n=2m$. .... **(2p)**

   Presupunem, prin reducere la absurd, că k este par.

   Atunci $k+1$ este impar, iar din egalitatea $n=2m=d_1+...+d_{k+1}$ deducem că cel puţin unul dintre numerele $d_1, ..., d_{k+1}$ este par, de exemplu $d_1 = 2 \cdot d$. Dar atunci $n=d+d+d_1+...+d_k$ s-ar scrie ca sumă de $k+2$ divizori ai săi, absurd.... **(3p)**

   Aşadar k este impar.

PROBLEMA 3. Laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC sunt împărţite fiecare în câte $n+1$ părţi egale de către punctele $A_1, A_2, ..., A_n$, $B_1, B_2, ..., B_n$, respectiv $C_1, C_2, ..., C_n$, unde $n \geq 2$.

Ana şi Bogdan joacă următorul joc format din trei runde:

- Ana alege $X \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ şi $Y \in \{B_1, B_2, ..., B_n\}$,
- apoi Bogdan alege $Z \in \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ şi $T \in \{C_1, C_2, ..., C_n\}$,
- iar apoi Ana alege $V \in \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ şi $W \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

Dacă $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZT} + \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{0}$, atunci Ana câştigă. Altfel, câştigă Bogdan.

Determinaţi cine are strategia câştigătoare.

Barem de corectare.

Condiţia ca Ana să câştige se rescrie $\overrightarrow{A_iB_j} + \overrightarrow{B_kC_l} + \overrightarrow{C_sA_t} = \overrightarrow{0}$, unde $i, j, k, l, t, s \in \{1, 2, ..., n\}$. Aceasta este echivalentă cu $\overrightarrow{A_iC} + \overrightarrow{CB_j} + \overrightarrow{B_kA} + \overrightarrow{AC_l} + \overrightarrow{C_sB} + \overrightarrow{BA_t} = \overrightarrow{0}$, sau $\frac{n+1-i}{n+1} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{j}{n+1} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{n+1-k}{n+1} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{l}{n+1} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n+1-s}{n+1} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{t}{n+1} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$, sau $(n+1-i+t) \cdot \overrightarrow{BC} + (n+1-k+j) \cdot \overrightarrow{CA} + (n+1-s+l) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Întrucât $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$, relaţia precedentă este echivalentă cu $(t-i-j+k) \cdot \overrightarrow{BC} + (l-s-j+k) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, relaţie care are loc dacă şi numai dacă $t = i + j - k$ şi $s = l + k - j$. .... **(3p)**

Dacă Ana alege $j \geq 2$, atunci Bogdan alege $k, l \in \{1, 2, ..., n\}$ pentru care $k + l = j$ şi atunci $s = 0$, deci Ana pierde. .... **(2p)**

Dacă Ana alege $j = 1$, atunci Bogdan alege $k = l = n$ şi atunci $s = 2n - 1 > n$, deci Ana pierde. .... **(2p)**

Aşadar, Bogdan are o strategie câştigătoare.

PROBLEMA 4. Fie ABC un triunghi şi M un punct în interiorul său. Paralela prin M la AB intersectează BC în N şi CA în R, paralela prin M la BC intersectează CA în Q şi AB în T, iar paralela prin M la CA intersectează AB în S şi BC în P.

a) Demonstraţi că $\frac{NP}{a} + \frac{RQ}{b} + \frac{ST}{c} = 1$.

b) Dacă A', B' respectiv C' sunt simetricele lui M faţă de mijloacele segmentelor NP, QR, respectiv ST, demonstraţi că

$$2 \max\{AA', BB', CC'\} < AA' + BB' + CC'.$$

Barem de corectare.

a) Din $\Delta MNP \sim \Delta ABC$, avem $\frac{NP}{a} = \frac{d(M, NP)}{d(A, BC)} = \frac{[MBC]}{[ABC]}$ şi similarele ..... **(2p)**

Adunând aceste relaţii obţinem concluzia. .... **(1p)**

b) Relaţia $2 \max\{AA', BB', CC'\} < AA' + BB' + CC'$este echivalentă cu existenţa unui triunghi ale cărui laturi au lungimile AA', BB', CC',

adică $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$ .... **(1p)**

În mod evident, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$ şi $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MT}$ .... **(1p)**

de unde $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MT}\right) + \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right) + \left(\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS}\right) = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$ .... **(2p)**

Concursul Interdisciplinar de Matematică şi Informatică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXVI-a; Oradea, 22-24 Martie 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Determinaţi funcţiile crescătoare $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f\left(\frac{x+g(x)}{2}\right)=\frac{x+g(x)}{2} \quad \text{şi} \quad g\left(\frac{x+f(x)}{2}\right)=\frac{x+f(x)}{2}.$$

Barem de corectare.
Consirerăm funcţiile $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x)=\dfrac{x+f(x)}{2}$ şi $g_1(x)=\dfrac{x+g(x)}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ .... **(1p)**
Cum f şi g sunt funcţii crescătoare, f_1 şi g_1 sunt strict crescătoare, deci injective... **(1p)**
Folosind relaţile din enunţ, obţinem succesiv:
$f_1(g_1(x))=\dfrac{g_1(x)+f(g_1(x))}{2}=\dfrac{g_1(x)+g_1(x)}{2}=g_1(x)$ (1) .... **(1p)**
respectiv $g_1(f_1(x))=\dfrac{f_1(x)+g(f_1(x))}{2}=\dfrac{f_1(x)+f_1(x)}{2}=f_1(x)$ (2) .... **(1p)**
Punem în relaţia (1) $x \to f_1(x)$ şi obţinem $f_1(g_1(f_1(x)))=g_1(f_1(x))$ .... **(1p)**
Folosind (2), va rezulta $f_1(f_1(x))=f_1(x)$, de unde, pe baza injectivităţii, deducem că $f_1(x)=x$, deci $f(x)=x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ .... **(1p)**
În mod analog, se obţine $g(x)=x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, soluţii care verifică ipoteza. **(1p)**

PROBLEMA 2. Fie A o mulţime nevidă şi $f, g : A \to A$ două funcţii cu proprietăţile:

i) Pentru orice $x \in A$, $f(x)=x$ sau $g(x)=x$.
ii) Există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(f \circ g)^k = 1_A$.

Demonstraţi că:

a) Dacă $x_0 \in A$ şi $f(x_0)=x_1 \neq x_0$, atunci $g(x_1)=x_1$.
b) $f^k = g^k = 1_A$.

($f^k = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k-ori}$, iar $1_A(x)=x$, $\forall\, x \in A$)

Barem de corectare.

a) Notând $h = f \circ g$, din $h^k = 1_A$ rezultă că g este injectivă. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $x_0 \in A$ astfel încât $f(x_0)=x_1 \neq x_0$ şi $g(x_1) \neq x_1$. Atunci $g(x_0)=x_0$, $f(x_1)=x_1$ şi $h(x_0)=f(g(x_0))=f(x_0)=x_1$.

Fie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul definit prin $y_1 = x_1$ şi $y_{n+1}=g(y_n), \forall n \geq 1$. Demonstrăm prin inducţie că $y_{n+1} \neq y_n$ şi $h^n(x_0)=y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Proprietatea este adevărată pentru $n = 1$. Presupunem că este adevărată pentru $n \geq 1$. Atunci $y_{n+2} = g(y_{n+1}) \neq g(y_n)$ (din injectivitate), deci $y_{n+2} \neq y_{n+1}$, ceea ce implică $f(y_{n+1}) = y_{n+1}$ şi $h^{n+1}(x_0) = h(y_n) = f(g(y_n)) = f(y_{n+1}) = y_{n+1}$. . . . . . **(2p)**

Însă $g(x_0) = x_0$ şi $g(y_n) \neq y_n$ implică $y_n \neq x_0, \forall n$, deci $h^n(x_0) = y_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, în contradicţie cu ipoteza $h^k = 1_A$. Contradicţia la care am ajuns ne arată că $g(x_1) = x_1$. . . . . **(1p)**

b) Demonstrăm că $f \circ g = g \circ f$.

Fie $x \in A$. Sunt posibile două cazuri: 1) $f(x) = g(x) = x$ şi 2) $f(x) \neq x$ sau $g(x) \neq x$.

În primul caz $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

În al doilea caz, dacă $f(x) = y \neq x$, atunci $g(x) = x$, $g(y) = y$ (din a)), deci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = y$ şi $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = y$, iar dacă $g(x) = y \neq x$, atunci $f(x) = x$, $f(y) = y$ (deoarece $g(y) \neq y$, din injectivitate), deci $f(g(x)) = f(y) = y$, $g(f(x)) = g(x) = y$.

Prin urmare $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \forall x \in A$, adică $f \circ g = g \circ f$. . . . . **(2p)**

Din comutativitate rezultă că $(f \circ g)^k = f^k \circ g^k = g^k \circ f^k$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că există $x \in A$ astfel încât $f^k(x) \neq x$.

Atunci $f(x) \neq x$, deci $g(x) = x$, ceea ce implică $g^k(x) = x$ şi

$$h^k(x) = (f^k \circ g^k)(x) = f^k(g^k(x)) = f^k(x) \neq x,$$

în contradicţie cu ipoteza $h^k = 1_A$.

Prin urmare $f^k = 1_A$, iar din $h^k = g^k \circ f^k$ obţinem şi că şi $g^k = 1_A$. . . . . **(2p)**

PROBLEMA 3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, distincte două câte două, de acelaşi modul r şi cu suma egală cu s. Demonstraţi că, dacă $z_1 + \frac{rs}{z_1}$, $z_2 + \frac{rs}{z_2}$ şi $z_3 + \frac{rs}{z_3}$ sunt reale, atunci z_1, z_2 şi z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

Barem de corectare.
Adunând cele trei numere reale, obţinem că $s + rs\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \in \mathbb{R}$ şi cum $\frac{1}{z_i} = \frac{\overline{z_i}}{r^2}$, rezultă $s + \frac{s\overline{s}}{r} \in \mathbb{R}$, de unde obţinem că $s \in \mathbb{R}$. Atunci, $z_i + \frac{rs}{z_i} = z_i + \frac{s}{r}\overline{z_i} \in \mathbb{R}$ şi cum cel puţin unul dintre numerele z_1, z_2, z_3 este din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (altfel s-ar contrazice faptul că z_1, z_2, z_3 sunt distincte două câte două şi de acelaşi modul), obţinem că $s = r$. . . . . . **(2p)**
Atunci $z_1 + z_2 + z_3 = r$ (1) şi $\overline{z_1 + z_2 + z_3} = r$, de unde reiese că $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{r}$ (2)**(1p)**
Înmulţind releţiile (1) şi (2) , obţinem $(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = 1$, relaţie care este echivalentă cu $(z_1 + z_2)(z_2 + z)(z_3 + z_1) = 0$. . . . . **(2p)**
Prin urmare, două dintre numerele z_1, z_2, z_3 sunt opuse, de modul r, iar al treilea este egal cu r, de unde se obţine concluzia problemei. . . . . **(2p)**

PROBLEMA 4. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri care au acelaşi centru de greutate, iar punctele A', B', C' se află pe laturile sau în interiorul triunghiului ABC. Să se arate că pentru orice $p \geq 1$ şi orice M din plan, are loc inegalitatea $A'M^p + B'M^p + C'M^p \leq AM^p + BM^p + CM^p$.

Barem de corectare.

Pentru orice punct X din plan, vom nota cu x coordonata sa complexă.

Din enunţ, există $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0$ cu $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3 = 1$, astfel încât

$$a' = x_1 a + x_2 b + x_3 c,\ b' = y_1 a + y_2 b + y_3 c \text{ şi } c' = z_1 a + z_2 b + z_3 c \ \ldots\ldots\ldots \textbf{(1p)}$$

Cum cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate, deducem că $(x_1 + y_1 + z_1 - 1)\, a + (x_2 + y_2 + z_2 - 1)\, b + (x_3 + y_3 + z_3 - 1)\, c = 0$, de unde $x_1 + y_1 + z_1 = 1$, $x_2 + y_2 + z_2 = 1$ şi $x_3 + y_3 + z_3 = 1 \quad (1)$ .... **(2p)**

Din $A'M = |m - a'| = |x_1 m + x_2 m + x_3 m - x_1 a - x_2 b - x_3 c| \leq x_1 |m - a| + x_2 |m - b| + x_3 |m - c|$ şi din convexitatea şi monotonia funcţiei x^p pe $[0, \infty)$, avem că

$$A'M^p \leq x_1 |m - a|^p + x_2 |m - b|^p + x_3 |m - c|^p = x_1 AM^p + x_2 BM^p + x_3 CM^p \ \ldots\ldots \textbf{(2p)}$$

Scriind şi inegalităţile pentru $B'M$ şi $C'M$, prin adunarea lor şi ţinând seama de (1), suntem conduşi la inegalitatea din enunţ. .... **(2p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Interdisciplinar de Matematică şi Informatică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXVI-a; Oradea, 22-24 Martie 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $\det(AB) = 1$. Demonstraţi că $(AB - BA)^2 = O_2$, dacă şi numai dacă $A^{-1}B^{-1}AB + B^{-1}A^{-1}BA = 2I_2$.

Barem de corectare.
Se ştie că, pentru orice $X \in M_2(\mathbb{C})$, avem $X^* = \operatorname{tr} X \cdot I_2 - X$. Dacă în plus $\det X = 1$, atunci $X^* = X^{-1}$, de unde $X^{-1} = \operatorname{tr} X \cdot I_2 - X$. .... **(2p)**
Cum $\det(AB) = \det(BA) = 1$, obţinem succesiv: $A^{-1}B^{-1}AB = (BA)^{-1}AB = \operatorname{tr}(BA) \cdot AB - BA^2B$ .... **(1p)**
Din relaţi lui Cayley, avem $\operatorname{tr}(AB) \cdot AB = (AB)^2 + \det(AB) \cdot I_2 = (AB)^2 + I_2$, deci $A^{-1}B^{-1}AB = (AB)^2 + I_2 - BA^2B$ .... **(2p)**
În mod analog, obţinem $B^{-1}A^{-1}BA = (BA)^2 + I_2 - AB^2A$. Prin adunarea ultimelor două egalităţi, se obţine $A^{-1}B^{-1}AB + B^{-1}A^{-1}BA = (AB - BA)^2 + 2I_2$, relaţie din care reiese echivalenţa cerută .... **(2p)**

PROBLEMA 2. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ şi M o mulţime de $n+1$ numere complexe. Demonstraţi că există $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ cu proprietatea că putem alege k elemente ale mulţimii M astfel încât înlocuind k elemente ale matricei A cu aceste elemente să obţinem o matrice inversabilă.

Barem de corectare.
Considerăm minorii diagonali: $\Delta_1 = |a_{11}|$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \det(A)$......... **(1p)**
Vom demonstra că înlocuind o parte dintre numerele $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ cu elemente ale mulţimii M putem face ca toţi aceşti minori să fie nenuli.
Într-adevăr, dacă primul minor diagonal nul are ordinul i, atunci înlocuind a_{ii} cu $x_i \neq a_{ii}$ se obţine un determinant D_i nenul, deoarece dezvoltând după linia i rezultă $D_i - \Delta_i = (x_i - a_{ii})\Delta_{i-1}$, deci $D_i = (x_i - a_{ii})\Delta_{i-1} \neq 0$. .... **(3p)**
După cel mult $n-1$ astfel de operaţii rezultă o matrice A' care are primii $n-1$ minori diagonali nenuli iar în M au rămas disponibile cel puţin două elemente, x_n şi x_{n+1}. Unul dintre acestea este sigur diferit de a_{nn}, deci putem proceda la fel pentru a obţine un minor nenul de ordin n. .... **(3p)**

PROBLEMA 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită cu proprietatea că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi orice şiruri strict monotone $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, ambele convergente la a, are loc relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{f(y_n)} = 1$.

a) Daţi exemplu de o astfel de funcţie, care să nu fie continuă.

b) Dacă f are proprietatea lui Darboux, arătaţi că f este continuă.

Barem de corectare.

a) Observăm ca funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ verifică condiţiile date şi este discontinuă în 0. . . . . **(2p)**

b) Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat şi $(z_n)_{n\geq 1}$ un şir nestaţionar de la un anumit rang şi convergent la a. Funcţia f este mărginită, deci şi şirul $(f(z_n))_{n\geq 1}$ este mărginit. Dacă acesta nu este convergent, atunci are două puncte distincte de acumulare s şi t. Atunci, există subşirurile strict monotone $(x'_n)_{n\geq 1}$ şi $(y'_n)_{n\geq 1}$ ale lui $(z_n)_{n\geq 1}$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = s$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(y'_n) = t$. . . . . **(2p)**

Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} y'_n = a$ şi aplicând ipoteza, avem $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x'_n)}{f(y'_n)} = \dfrac{s}{t}$, contradicţie. Atunci şirul $(f(z_n))_{n\geq 1}$ este convergent şi în consecinţă f are limită în a. Întrucât are şi proprietatea lui Darboux, rezultă că f este continuă în a. . . . . **(3p)**

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$|t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + t_3 f(x_3)| \leq |t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3|,$$

pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ cu suma $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

Barem de corectare.

Pentru $(t_1, t_2, t_3) = (1, -1, 0)$ şi $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, 0)$ cu x şi y arbitrare, obţinem $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ şi de aici rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ . . . . . . **(2p)**

Luând $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, -2)$ şi $(x_1, x_2, x_3) = \left(x, y, \dfrac{x+y}{2}\right)$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrare, deducem că $\left|f(x) + f(y) - 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right| \leq \left|x + y - 2\dfrac{x+y}{2}\right| = 0$,

adică $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ . . . . **(1p)**

Demonstrază că egalitatea de mai sus conduce la ecuaţia funcţionala a lui Cauchy pentru $g(x) = f(x) - f(0)$, de unde există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = ax + b$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. . . **(3p)**

Dacă numai afirmă aceasta, se va acorda 1 punct.

Condiţia din enunţ se verifică dacă şi numai dacă $|a| \leq 1$ . . . . **(1p)**

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Concursul Interdisciplinar de Matematică şi Informatică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXVI-a; Oradea, 22-24 Martie 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie p un număr prim impar şi $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, ..., A_p\} \subset GL_2(\mathbb{R})$ (grupul matricelor inversabile de ordinul 2 cu elemente reale), o mulţime cu proprietatea:

$$A \cdot B \in \mathcal{M},\ \forall\ A, B \in \mathcal{M}.$$

a) Demonstraţi că $A_1 + A_2 + ... + A_p = O_2$.

b) Rămâne proprietatea de la a) adevărată dacă $\mathcal{M} \subset GL_2(\mathbb{C})$?

Barem de corectare.

a) Din ipoteză $(\mathcal{M}, \cdot)$ este subgrup de ordin p al lui $GL_2(\mathbb{R})$. Deoarece p este prim, acest grup este ciclic, deci $A^p = I$ şi $\mathcal{M} = \{I, A, ..., A^{p-1}\}$, unde A este o matrice din $\mathcal{M}$ diferită de I. Aşadar suma elementelor lui $\mathcal{M}$ este $S = I + A + ... + A^{p-1}$ şi $(I - A)S = I - A^p = O$. .... **(3p)**

Arătăm că $I - A$ este inversabilă. Într-adevăr, în caz contrar, $det(A - I) = (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12} = 0$, deci $detA - trA + 1 = 0$, şi cum $detA = 1$, $trA = 2$. Rezultă că $A^2 - 2A + I_2 = O$, adică $A^2 = 2A - I_2$ şi, prin inducţie, $A^k = kA - (k-1)I$, $\forall k \geq 2$. În particular $A^p = pA - (p-1)I$, deci $pA - (p-1)I = I$, în contradicţie cu $A \neq I$. **(2p)**

b) Nu, după cum se vede din exemplul: $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} : \varepsilon^p = 1 \right\}$.............. **(2p)**

Observaţie. Proprietatea de la b) nu mai este adevărată pentru matricele din $GL_n(\mathbb{R})$ cu $n > 2$.

PROBLEMA 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x^{2^n+2} = x^{2^n-1}$, pentru orice $x \in A$. Demonstraţi că $x^4 = x$, pentru orice $x \in A$.

Barem de corectare.

Punând în relaţia din enunţ $x = -1$, se obţine $1 = -1$, de unde $2x = 0$, pentru orice $x \in A$. Inductiv, obţinem că $(1+x)^{2^p} = 1 + x^{2^p}$, pentru orice $x \in A$ şi $p \in \mathbb{N}^*$ (1) . . **(2p)**

Atunci

$$\begin{aligned} (1+x)^{2^n-1} &= (1+x)^{2^n+2} = (1+x)^2 (1+x)^{2^n} \overset{(1)}{=} \left(1+x^2\right)\left(1+x^{2^n}\right) \\ &= 1 + x^{2^n} + x^2 + x^{2^n+2} = 1 + x^2 + x^{2^n-1} + x^{2^n}, \end{aligned}$$

deci $(1+x)^{2^n-1} = 1 + x^2 + x^{2^n-1} + x^{2^n}$. .... **(2p)**

Multiplicând cu $1 + x$ şi ţinând cont de (1), reiese că

$$(1+x)^{2^n} = (1+x)\left(1 + x^2 + x^{2^n-1} + x^{2^n}\right),$$

adică

$$(1+x)^{2^n} = 1 + x^2 + x^{2^n-1} + x^{2^n} + x + x^3 + x^{2^n} + x^{2^n+1},$$

deci $x + x^2 + x^3 + x^{2^n-1} + x^{2^n} + x^{2^n+1} = 0$, pentru orice $x \in A$. (2) .... **(2p)**
Multiplicând (2) cu x şi ţinând cont de ipoteză, reiese că $x^2+x^3+x^4+x^{2^n}+x^{2^n+1}+x^{2^n-1} = 0$, pentru orice $x \in A$. (3) .... **(1p)**
Din (2) şi (3), se obţine că $x^4 = x$, pentru orice $x \in A$.

PROBLEMA 3. Fie $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi continuă, cu $f(1) = 0$ şi $f(2) \geq 0$. Să se arate că există $c \in [1,2)$, astfel încât $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx \leq \frac{2-c}{2c} \cdot f(2)$.

Barem de corectare.
Dacă $f(2) = 0$, atunci din convexitatea lui f avem că $f(x) \leq 0$ şi atunci $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx \leq 0$ şi în concluzie, c poate fi oricare element din $[1,2)$ .... **(1p)**
Dacă $f(2) > 0$, fie $A = \{a \in [1,2) : f(a) = 0\}$.
În cazul în care $A = \{1\}$, atunci $f(x) > 0$, $\forall\ x \in (1,2]$, de unde $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq \frac{f(1)+f(2)}{2} = \frac{f(2)}{2}$ şi atunci $c = 1$. .... **(2p)**
În cazul în care $card(A) > 1$, atunci există $c \in (1,2)$ astfel încât $c = \sup A$. Din continuitate, $f(c) = 0$ şi atunci din convexitate, $f(x) \leq 0$, $\forall\ x \in [1,c]$ şi $f(x) > 0$, $\forall\ x \in (c,2]$, de unde $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^c \frac{f(x)}{x}dx + \int_c^2 \frac{f(x)}{x}dx \leq \int_c^2 \frac{f(x)}{x}dx \leq \frac{1}{c}\int_c^2 f(x)\,dx \leq \frac{(2-c)(f(c)+f(2))}{2c} = \frac{(2-c)}{2c} \cdot f(2)$ .... **(4p)**

PROBLEMA 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în 0 şi integrabilă pe orice interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Să se arate că, dacă $\displaystyle\int_0^{x+y} f(t)\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f(t)\,dt$ pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(0)\cdot(b-a)$, pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$.

Barem de corectare.
Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Din faptul că f este continuă în 0, avem că $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = f(0)$ .... **(2p)**
Cum $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$, $\forall\ x,y \in \mathbb{R}$, deducem că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, avem $F(x) \leq n \cdot F\left(\frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow F(x) \leq x \cdot \frac{n}{x} \cdot F\left(\frac{x}{n}\right)$ şi cum $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = f(0)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, avem că $F(x) \leq x \cdot f(0)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$. .... **(3p)**
Pe de altă parte, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, $0 = F(0) \leq F(x) + F(-x) \leq F(x) - x \cdot f(0)$, de unde $x \cdot f(0) \leq F(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$ .... **(1p)**
În concluzie, $F(x) = f(0)\cdot x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ şi atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = f(0)\cdot(b-a)$, $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ .... **(1p)**

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.